Sesión Olímpica 31 de Enero, polinomios y desigualdades

José Manuel Sánchez Cuadrado

31/1/20

Ejercicio 1. Probar la desigualdad

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right| \leq \frac{|x|+|y|}{1+|xy|}$$

para todo x, y con $|x| < 1$ y $|y| < 1$.

2. Sean $x, y, z > 0$,

1. Si $x + y + z \geq 3$, ¿se tiene siempre que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$?
2. Si $x + y + z \leq 3$, ¿se tiene siempre que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$?

3. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \text{y} \quad Q(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

cuyas raices son x_1, x_2, x_3 y $1/x_1,\ 1/x_2,\ 1/x_3$ respectivamente. Si $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, prueba que $a \cdot A \geq 9$ y $b \cdot B \geq 9$.

4. Dados los polinomios $x^2+a_1x+b_1,\ x^2+a_2x+b_2, \ldots, x^2+a_nx+b_n$, se sabe que sus raíces son $(x_0, x_1),\ (x_0, x_2), \ldots, (x_0, x_n)$ respectivamente. Encontrar razonadamente las raíces del polinomio

$$x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

5. Determinar todos los posibles polinomios P, Q de la forma $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ y $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ tales que sus raíces sean a, b, c y $(a+b)/2$ y $(b+c)/2$ respectivamente.

6. Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x) = 3x^2 + 3mx + m^2 - 1$, siendo m real. Probar que $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

7. Econtrar todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ x^2y + xy^2 &= -2 \end{cases}$$

8. Sean $a, b, c > 0$ tales que $abc = 1$ probar que

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ac}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Apéndice: Desigualdad de las medias y desigualdad de Nesbitt

Dado $x_1, \ldots, x_n$ positivos, definimos la media generalizada $M_p(\underline{x})$ como

$$M_p(\underline{x}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p},$$

para todo $p \in \overline{\mathbb{R}}$. Para $p = -\infty,\ p = \infty$ y $p = 0$ se definen

$$M_{-\infty}(\underline{x}) = \min\{x_1, \ldots, x_n\}, \quad M_\infty(\underline{x}) = \max\{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{y} \quad M_0(\underline{x}) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

respectivamente.

Teorema. *En las condiciones anteriores, si $p < q$ entonces $M_p(\underline{x}) < M_q(\underline{x})$.*

Corolario. *Para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positivos se tiene*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Estas son conocidas como las medias armónica, geométrica, artimética y cuadrática respectivamente.

Teorema (Desigualdad de Nesbitt)**.** *Para todo $a, b, c > 0$ se tiene*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Ejercicio. Probar la desigualdad de Nesbitt (*Ayuda*: Aplicar la desigualdad entre la media armónica y aritmética a $x_1 = a+b, x_2 = b+c$ y $x_3 = a+c$).